5ο **ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

(ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ)

ΘΕΜΑ Α

Α1 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: f(\chi)=\chi^{\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}-\{0\ ,\ 1\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει : $f'(\chi)= \nu\cdot\chi^{\nu-1}$. **Μονάδες 5**

Α2 . Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία . **Μονάδες** 5

Α3 . Δίνεται ο παρακάτω συλλογισμός :

« Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in A$, τότε ισχύει :

$f'(\chi_o)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}=\ell\in\mathbb{R}$ και εάν θέσουμε όπου $h\to -h$, τότε έχουμε

$f'(\chi_o)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0-h)-f(\chi_0)}{-h}=\ell\in\mathbb{R}$, οπότε , ισοδύναμα , διαπιστώνουμε ότι το

όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0-h)}{h}$ υπάρχει , είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}-\frac{f(\chi_0-h)-f(\chi_0)}{h}\right]=$$

$$=\ell-(-\ell)=2\cdot\ell=2\cdot f'(\chi_0).$$ »

Να εντοπίσετε και να εξηγήσετε το λάθος στην απόδειξη του παραπάνω συλλογισμού , χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα . **(10 Μονάδες)**

Α4 . Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές **(Σ)** ή λανθασμένες **(Λ)** .

(i) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[1\ ,\ 3]$, τότε και η συνάρτηση $g: g(\chi)=f(2\cdot\chi-1)$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[1\ ,\ 2]$.

(ii) Αν για δύο συναρτήσεις $f\ ,\ g$ ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=\ell_1\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=\ell_2\in\mathbb{R}$, όπου $\ell_1>\ell_2$, τότε υποχρεωτικά ισχύει : $f(\chi)>g(\chi)$, “ κοντά ” στο χ_0 .

(iii) Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha\ ,\ \beta]$ και $f(\beta)$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης , τότε κατ’ ανάγκη θα είναι : $f'(\beta)=0$.

(iv) Η συνάρτηση $f:[0\ ,\ \pi]\to[0\ ,\ 1]$ με τύπο $f(\chi)=\eta\mu\chi$ είναι $1-1$.

(v) Δεν υπάρχει το όριο : $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi^2}$. (5 **Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(\chi)=\begin{cases} 5\cdot\chi^2-4\beta\cdot\chi+\beta^2 & ,\ \alpha\nu\ \ \chi\neq\alpha \\ 2\cdot\chi-1 & ,\ \alpha\nu\ \ \chi=\alpha \end{cases}$$

, όπου α , $\beta\in\mathbb{R}$.

Β1 . Να βρείτε τους αριθμούς α , β και να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι :
$f(\chi)=5\cdot\chi^2-8\cdot\chi+4$, $\chi\in\mathbb{R}$. **Μονάδες** 5

Β2 . Να βρείτε σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f το οποίο να απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $(\varepsilon)\to 4\cdot\chi-3\cdot\psi-3=0$

Μονάδες 6

Β3 . Να υπολογίσετε , εάν υπάρχει το όριο : $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-\sqrt{\chi}}{\ln\chi}$. **Μονάδες** 5

Θεωρούμε τον περιορισμό της συνάρτησης f στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Β4 . Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται για κάθε $\chi\geq 1$, να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} και στη συνέχεια να βρείτε , αν υπάρχουν , τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$.

Μονάδες 6

Β5 . Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των f , f^{-1} στο $[1,+\infty)$ σε κοινό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων . **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Γ

Για την καταπολέμηση ενός νέου ιού μια βιομηχανία φαρμάκων κατασκευάζει ύστερα από μελέτες ένα νέο φάρμακο το οποίο θέλει να κυκλοφορήσει στην αγορά . Το φάρμακο αυτό θα δοθεί σε ασθενείς του συγκεκριμένου ιού για πρώτη φορά . Έστω f η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου σε mgr / ml στον οργανισμό ενός ασθενούς μετά από χρόνο t (σε ώρες) από τη χοτρήγησή του . Το φάρμακο αρχίζει να ενεργεί στον ασθενή (δηλαδή η συγκέντρωση του φαρμάκου επιδρά στον οργανισμό) αμέσως μετά την πάροδο 1 ώρας από τη χορήγησή του .

Υποθέτουμε ότι $f(t)=\dfrac{\alpha}{t-1}-\dfrac{\beta}{t}$, όπου $\alpha,\beta>0$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί .

Γ1 . Να εξετάσετε αν υπάρχουν χρονικές στιγμές για τις οποίες η συγκέντρωση του φαρμάκου να παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή . **Μονάδες** 8

Τη χρονική στιγμή $t=2$ ώρες η ευθεία $(\varepsilon)\to\ 4\cdot\psi+3\cdot\chi-8=0$ εφάπτεται της καμπύλης

που περιγράφει τη συγκέντρωση $f(t)$ σε ένα σύστημα αξόνων $(O,t,f(t))$.

Γ2 . Να αποδείξετε ότι : $\alpha=\beta=1$. **Μονάδες** 6

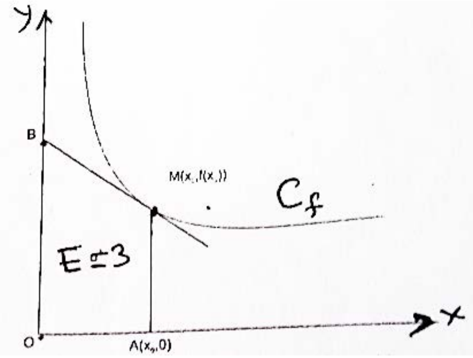
Γ3 . Να υπολογίσετε , εάν υπάρχει , το όριο : $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\ f(2)+f(3)+f(4)+\ ....\ +f(t)\ \right)$.

Μονάδες 6

Γ4 . Να υπολογίσετε , εάν υπάρχει , το όριο $\lim\limits_{t\to1}f(t)$. Θεωρείται το συγκεκριμένο φάρμακο κατάλληλο για να προωθηθεί στην αγορά ή θα πρέπει άμεσα να καταργηθεί ως άκρως επικίνδυνο για τον άνθρωπο ; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ



Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0\ ,\ +\infty)$ για την οποία ισχύει : $f(\chi)>0$, για κάθε $\chi\in(0\ ,\ +\infty)$. Η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο M της C_f , τέμνει τον θετικό ημιάξονα $O\psi$ σε σημείο B, (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα) έτσι ώστε το τραπέζιο $OBMA$ να έχει σταθερό εμβαδόν ίσο με 3 τ.μ , όπου A σημείο του θετικού ημιάξονα $O\chi$ με την ίδια τετμημένη με αυτήν του N .

Δ1 . Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f έχει τη γενική μορφή : $f(\chi)=c\cdot\chi^2+\dfrac{2}{\chi}$, όπου $c\in\mathbb{R}$ σταθερός αριθμός .

Μονάδες 9

Δ2 . Αν $K(\chi_1\ ,\ \psi_1)$ είναι ένα τοπικό ακρότατο της συνάρτησης f να βρείτε και να χαράξετε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου K στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων .

Μονάδες 6

Υποθέτουμε ότι : $(\chi-1)\cdot\left(c\cdot\chi^2+c\cdot\chi-2\right)\geq0$, για κάθε $\chi>0$.

Δ3 . Να αποδείξετε ότι : $c=1$. **Μονάδες** 4

Δ4 . Να λύσετε την εξίσωση : $\chi\cdot\left(\eta\mu(\pi\cdot\chi)-\chi^2\right)=2\cdot\left(\chi\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot\chi)+1\right)$ στο διάστημα $(0\ ,\ +\infty)$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΕΙΣ 5ου ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝ. Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

(ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ)

ΘΕΜΑ Α

Α1 . Αν $\chi_0 \in \mathbb{R}$, τότε για $\chi \neq \chi_0$ ισχύει :

$$\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\frac{\chi^{\nu}-\chi_0^{\nu}}{\chi-\chi_0}=\frac{(\chi-\chi_0)\cdot\left(\chi^{\nu-1}+\chi^{\nu-2}\cdot\chi_0+...+\chi_0^{\nu-1}\right)}{\chi-\chi_0}=\chi^{\nu-1}+\chi^{\nu-2}\cdot\chi_0+...+\chi_0^{\nu-1}$$

οπότε : $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\left(\chi^{\nu-1}+\chi^{\nu-2}\cdot\chi_0+...+\chi_0^{\nu-1}\right)=\nu\cdot\chi_0^{\nu-1}$ δηλαδή $\left(\chi^{\nu}\right)'=\nu\cdot\chi^{\nu-1}$.

Α2 . Το θεώρημα Fermat διατυπώνεται ως εξής : Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και έστω χ_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο χ_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , τότε ισχύει : $f'(\chi_0)=0$, δηλαδή στο σημείο $A(\chi_0\ ,\ f(\chi_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια .

Α3 . Το λάθος στην απόδειξη του παραπάνω συλλογισμού βρίσκεται στη λέξη « **ισοδύναμα** » , διότι μπορεί να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0-h)}{h}$ και να είναι πραγματικός αριθμός , χωρίς να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}$. Για παράδειγμα , για τη συνάρτηση $f: f(\chi)=|\chi|$, στο $\chi_0=0$, ισχύει : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-|-h|}{h}=0$,

αλλά δεν υπάρχει το όριο : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$.

Α4 . (i) **Σωστό** (διότι θα πρέπει , $\chi\in\mathbb{R}$ και $(2\cdot\chi-1)\in[1\ ,\ 3]\Rightarrow\chi\in[1\ ,\ 2]$)

(ii) **Λάθος** (διότι για τις συναρτήσεις f, g με τύπους $f(\chi)=\chi^2+1$ και $g(\chi)=\sqrt{\chi^4+\chi^2+1}$ ισχύει $f(\chi)>g(\chi)$ “ κοντά ” στο $\chi_0=0$, αλλά $\lim\limits_{\chi\to 0}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}g(\chi)=1$)

(iii) **Λάθος** (διότι για την συνάρτηση f, g με τύπους $f:[-1\ ,\ 2]\to\mathbb{R}$ με $f(\chi)=\chi^2$, που είναι παραγωγίσιμη στο $[-1\ ,\ 2]$ η μέγιστη τιμή της είναι το $f(2)=4$, αλλά $f'(2)=4\neq 0$)

(iv) **Λάθος** (διότι $f(0)=f(\pi)$)

(v) **Σωστό** (διότι $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\cdot\dfrac{1}{\chi}\right)=+\infty$, ενώ $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\cdot\dfrac{1}{\chi}\right)=-\infty$)

ΘΕΜΑ Β

Β1 . Η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $\chi=\alpha$, οπότε ισχύει :

$$\lim_{\chi\to\alpha} f(\chi)=f(\alpha)\Rightarrow 5\cdot\alpha^2-4\beta\cdot\alpha+\beta^2=2\cdot\alpha-1\Rightarrow(2\cdot\alpha-\beta)^2+(\alpha-1)^2=0\Rightarrow\alpha=1 \ \text{και}\ \beta=2 ,$$

οπότε η συνάρτηση γίνεται

$$f(\chi)=\begin{cases}5\cdot\chi^2-8\cdot\chi+4 & ,\ \text{αν}\ \chi\neq 1\\ 2\cdot\chi-1 & ,\ \text{αν}\ \chi=1\end{cases}\Rightarrow f(\chi)=5\cdot\chi^2-8\cdot\chi+4 ,\ \chi\in\mathbb{R} .$$

Β2 . Έστω $M(\chi_0 ,\ f(\chi_0))\in C_f$, το ζητούμενο σημείο . Θα ισχύει

$$d(M,(\varepsilon))=\frac{|4\cdot\chi_0-3\cdot f(\chi_0)-3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|4\cdot\chi_0-3\cdot(5\cdot\chi_0^2-8\cdot\chi_0+4)-3|}{5}=\frac{15\cdot\chi_0^2-28\cdot\chi_0+15}{5} .$$

Η συνάρτηση $d(\chi)=\dfrac{15\cdot\chi^2-28\cdot\chi+15}{5}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$d'(\chi)=\dfrac{30\cdot\chi-28}{5}=0\Rightarrow\chi=\dfrac{14}{15}$. Η συνάρτηση d είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty ,\ \dfrac{14}{15}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{14}{15} ,+\infty\right)$, άρα για $\chi=\dfrac{14}{15}$ παρουσιάζει ελάχιστη απόσταση , οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(\dfrac{14}{15},\ f\left(\dfrac{14}{15}\right)=\dfrac{8}{9}\right)$.

Β3 . Έχουμε : $\displaystyle\lim_{\chi\to 1}\frac{f(\chi)-\sqrt{\chi}}{\ell n\chi}\overset{0/0}{=}\lim_{\chi\to 1}\left(\frac{f(\chi)-\sqrt{\chi}}{\chi-1}\cdot\frac{\chi-1}{\ell n\chi}\right)=\ell$.

$$\lim_{\chi\to 1}\left(\frac{f(\chi)-\sqrt{\chi}}{\chi-1}\right)=\lim_{\chi\to 1}\left(\frac{5\cdot\chi^2-8\cdot\chi+3}{\chi-1}-\frac{\sqrt{\chi}-1}{\chi-1}\right)=\lim_{\chi\to 1}\left(\frac{(\chi-1)\cdot(5\cdot\chi-3)}{\chi-1}-\frac{1}{\sqrt{\chi}+1}\right)=$$

$$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$\displaystyle\lim_{\chi\to 1}\left(\frac{\chi-1}{\ell n\chi}\right)=\lim_{\chi\to 1}\frac{1}{\dfrac{\ell n\chi-\ell n1}{\chi-1}}=1$, αφού για τη συνάρτηση $g : g(\chi)=\ell n\chi ,\ \chi>0$

ισχύει : $g'(1)=1$, άρα $\ell=\dfrac{3}{2}$.

Β4 . Για κάθε $\chi \ge 1$, έχουμε $f'(\chi) = 10\cdot\chi - 8 \ge 2$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα $1-1$ οπότε αντιστρέφεται . Θέτουμε :

$f(\chi) = \psi = 5\cdot\chi^2 - 8\cdot\chi + 4 \Rightarrow 5\cdot\chi^2 - 8\cdot\chi + (4-\psi) = 0$ (1) . Επειδή

$\chi \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \ge 0 \Rightarrow 64 - 20\cdot(4-\psi) \ge 0 \Rightarrow 20\cdot\psi \ge 16 \Rightarrow \psi \ge \frac{4}{5}$. Άρα

$$\chi = \frac{8 \pm \sqrt{20\cdot\psi - 16}}{10} = \begin{cases} \dfrac{4+2\cdot\sqrt{5\cdot\psi-4}}{5} \ge 1 \\ \dfrac{4-2\cdot\sqrt{5\cdot\psi-4}}{5} < 1 \end{cases}$$, άρα ορίζεται η συνάρτηση

$f^{-1}:\left[\frac{4}{5},+\infty\right) \to [1,+\infty)$ με $f^{-1}(\chi) = \frac{4+2\cdot\sqrt{5\cdot\chi-4}}{5}$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(\chi) = f^{-1}(\chi)$, όπου $\chi \in [1,+\infty) \cap \left[\frac{4}{5},+\infty\right) = [1,+\infty)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(\chi) = \chi$. Έστω

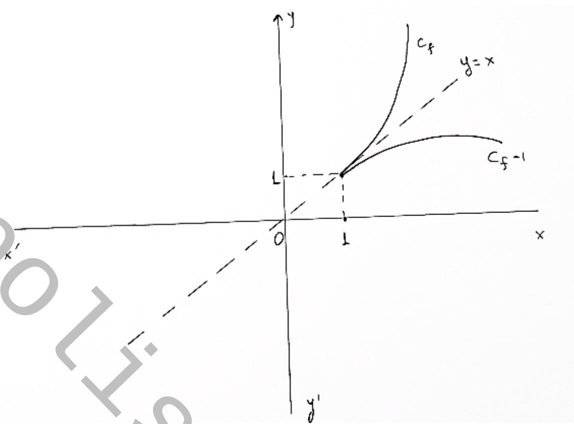
$f(\chi) < \chi \Rightarrow f^{-1}(\chi) < \chi \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(\chi)\right) < f(\chi) \Rightarrow \chi < f(\chi)$, άτοπο .

Όμοια , σε άτοπο καταλήγουμε αν $f(\chi) > \chi$. Άρα

$f(\chi) = \chi \Rightarrow 5\cdot\chi^2 - 9\cdot\chi + 4 = 0 \Rightarrow \chi = 1$ ή $\chi = \frac{4}{5}$,

απορρίπτεται , άρα το μοναδικό κοινό σημείο τομής τους είναι το $A(1\,,\,1)$.

Β5 . Η γραφικές παραστάσεις των f , f^{-1} στο $[1,+\infty)$ φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα .



ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Η συνάρτηση $f(t) = \frac{\alpha}{t-1} - \frac{\beta}{t}$, όπου $t > 1$, είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(t) = -\frac{\alpha}{(t-1)^2} + \frac{\beta}{t^2} = \frac{\beta\cdot(t-1)^2 - \alpha\cdot t^2}{t^2\cdot(t-1)^2} = \frac{(\beta-\alpha)\cdot t^2 - 2\cdot\beta\cdot t + \beta}{t^2\cdot(t-1)^2}$.

Έχουμε : $f'(t) = 0 \Rightarrow (\beta-\alpha)\cdot t^2 - 2\cdot\beta\cdot t + \beta = 0$. (1)

- Αν $\alpha = \beta$, η εξίσωση (1) γίνεται : $-2\cdot\beta\cdot t + \beta = 0 \overset{\beta>0}{\Rightarrow} t = \frac{1}{2} < 1$, το οποίο απορρίπτεται .
- Αν $\alpha \ne \beta$, τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα :
  $\Delta = 4\cdot\beta^2 - 4\cdot(\beta-\alpha)\cdot\beta = 4\cdot\beta^2 - 4\cdot\beta^2 + 4\cdot\alpha\cdot\beta = 4\cdot\alpha\cdot\beta > 0$, άρα υπάρχουν $t_1\,,\,t_2 \in \mathbb{R}\,:\,t_1 \ne t_2$
  όπου $t_1 = \frac{2\cdot\beta - \sqrt{4\cdot\alpha\cdot\beta}}{2\cdot(\beta-\alpha)} = \frac{\beta - \sqrt{\alpha\cdot\beta}}{\beta-\alpha}$ και $t_2 = \frac{2\cdot\beta + \sqrt{4\cdot\alpha\cdot\beta}}{2\cdot(\beta-\alpha)} = \frac{\beta + \sqrt{\alpha\cdot\beta}}{\beta-\alpha}$.

- Αν $\alpha < \beta \Rightarrow \beta - \alpha > 0$, άρα $t_1 < 1 < t_2$ διότι

  $t_1 = \dfrac{\beta - \sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\beta - \alpha} < 1 \Rightarrow \beta - \sqrt{\alpha \cdot \beta} < \beta - \alpha \Rightarrow \sqrt{\alpha \cdot \beta} > \alpha \Rightarrow \alpha \cdot \beta > \alpha^2 \overset{:(\alpha>0)}{\Rightarrow} \beta > \alpha$, που ισχύει και

  $t_2 = \dfrac{\beta + \sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\beta - \alpha} > 1 \Rightarrow \beta + \sqrt{\alpha \cdot \beta} > \beta - \alpha \Rightarrow \sqrt{\alpha \cdot \beta} > -\alpha$, που ισχύει , άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα αύξουσα στο $(1 , t_2)$ και γνησίως αύξουσα στο $[t_2 , +\infty)$,

  άρα για $t = t_2 = \dfrac{\beta + \sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\beta - \alpha}$ η συγκέντρωση του φαρμάκου παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την $f(t_2)$.

- Αν $\alpha > \beta \Rightarrow \beta - \alpha < 0$, άρα $t_2 < t_1 < 1$ διότι

  $t_1 = \dfrac{\beta - \sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\beta - \alpha} < 1 \Rightarrow \beta - \sqrt{\alpha \cdot \beta} > \beta - \alpha \Rightarrow \sqrt{\alpha \cdot \beta} < \alpha \Rightarrow \alpha \cdot \beta < \alpha^2 \overset{:(\alpha>0)}{\Rightarrow} \beta < \alpha$, που ισχύει και

  $t_2 < t_1 \Rightarrow \dfrac{\beta + \sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\beta - \alpha} < \dfrac{\beta - \sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\beta - \alpha} \overset{\beta - \alpha < 0}{\Rightarrow} \beta + \sqrt{\alpha \cdot \beta} > \beta - \sqrt{\alpha \cdot \beta} \Rightarrow \sqrt{\alpha \cdot \beta} > -\sqrt{\alpha \cdot \beta}$, που ισχύει ,

  άρα στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει χρονική στιγμή για την οποία η συγκέντρωση του φαρμάκου να παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή .

Γ2 . Η εφαπτομένη της καμπύλης της συγκέντρωσης $f(t)$ για $t = 2$ ώρες δίνεται από τον τύπο :

$(\varepsilon) \to \psi - f(2) = f'(2) \cdot (\chi - 2) \Rightarrow \psi = f'(2) \cdot \chi + f(2) - 2 \cdot f'(2)$ και επειδή ισχύει : $(\varepsilon) \to \psi = -\dfrac{3}{4} \cdot \chi + 2$,

άρα θα ισχύει $f'(2) = -\dfrac{3}{4}$ και $f(2) - 2 \cdot f'(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 2 + 2\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$. Έχουμε το σύστημα :

$f(2) = \alpha - \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot \alpha - \beta = 1$ (1) και $f'(2) = \dfrac{4 \cdot (\beta - \alpha) - 4 \cdot \beta + \beta}{4} = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow \beta - 4 \cdot \alpha = -3$ (2) , από το οποίο προκύπτει ότι : $\alpha = \beta = 1$.

Γ3 . Με $\alpha=\beta=1$ η συγκέντρωση γίνεται : $f(t)=\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t}$, $t>1$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=1-\dfrac{1}{2} \\ f(3)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3} \\ f(4)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4} \\ \cdots\cdots\cdots \\ f(t-1)=\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{t-1} \\ f(t)=\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t} \end{array}\right\}(+)\Rightarrow f(2)+f(3)+f(4)+\ldots\ldots+f(t)=1-\dfrac{1}{t}\text{ , άρα}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\ f(2)+f(3)+f(4)+\ \ldots\ +f(t)\ \right)=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1$$

Γ4 . Έχουμε : $\lim\limits_{t\to1}f(t)=\lim\limits_{t\to1^+}\left(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t}\right)=+\infty$. Το συγκεκριμένο φάρμακο θα πρέπει άμεσα να καταργηθεί ως άκρως επικίνδυνο για τον άνθρωπο , διότι αμέσως μετά τη χορήγησή του παρουσιάζει τεράστια ποσότητα συγκέντρωσης (οριακά φτάνει στο άπειρο) ικανή να μην αντέξει ο ανθρώπινος οργανισμός .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 . Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(\chi_0\ ,\ f(\chi_0)\right)$ δίνεται από την εξίσωση :
$(\varepsilon)\to\psi-f(\chi_0)=f'(\chi_0)\cdot(\chi-\chi_0)$ (1) . Για $\chi=0$ από την εξίσωση (1) , παίρνουμε :
$\psi=f(\chi_0)-\chi_0\cdot f'(\chi_0)$, οπότε $B\left(0\ ,\ f(\chi_0)-\chi_0\cdot f'(\chi_0)\right)$ και $(OB)=f(\chi_0)-\chi_0\cdot f'(\chi_0)$.
Το εμβαδόν του τραπεζίου $OBMA$ είναι :

$$E=\frac{1}{2}\cdot\left((OB)+(MA)\right)\cdot(OA)\Rightarrow3=\frac{1}{2}\cdot\left(f(\chi_0)-\chi_0\cdot f'(\chi_0)+f(\chi_0)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow2\chi_0\cdot f(\chi_0)-\chi_0^2\cdot f'(\chi_0)=6\overset{:(-\chi_0^2<0)}{\Rightarrow}f'(\chi_0)-\frac{2}{\chi_0}\cdot f(\chi_0)=-\frac{6}{\chi_0^2}\ ,\ \chi_0\in(0\ ,+\infty)\ .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $f'(\chi)-\dfrac{2}{\chi}\cdot f(\chi)=-\dfrac{6}{\chi^2}$, $\chi\in(0\ ,+\infty)$.

Έχουμε : $\dfrac{1}{\chi^2}\cdot f'(\chi)-\dfrac{2}{\chi^3}\cdot f(\chi)=-\dfrac{6}{\chi^4}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{\chi^2}\cdot f(\chi)\right)'=\left(\dfrac{2}{\chi^3}\right)'\Rightarrow\dfrac{1}{\chi^2}\cdot f(\chi)=\dfrac{2}{\chi^3}+c$, $c\in\mathbb{R}$, απ΄ όπου προκύπτει ότι : $f(\chi)=c\cdot\chi^2+\dfrac{2}{\chi}$, όπου $c\in\mathbb{R}$ σταθερός αριθμός .

Δ2 . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(\chi)=2\cdot c\cdot \chi-\dfrac{2}{\chi^2}$. Έχουμε

$$f'(\chi)=0\Rightarrow 2\cdot c\cdot\chi-\frac{2}{\chi^2}=0\Rightarrow\frac{2\cdot c\cdot\chi^3-2}{\chi^2}=0\Rightarrow\chi^3=\frac{1}{c}>0\Rightarrow\chi=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\ .$$

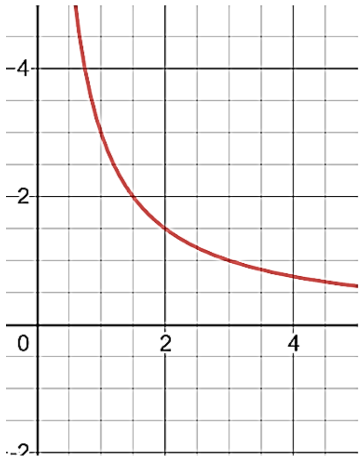
Αν $\chi>\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}\ \Rightarrow f'(\chi)>0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}\ ,+\infty\right)$.

Αν $0<\chi\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}\ \Rightarrow f'(\chi)\le 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0\ ,\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}\right]$.

Στο $\chi_1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το

$$f(\chi_1)=f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right)=c\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right)^2+2\cdot\sqrt[3]{c}=\frac{c}{\left(\sqrt[3]{c}\right)^2}+2\cdot\sqrt[3]{c}=3\cdot\sqrt[3]{c}$$ · Άρα

$K\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}\ ,\ 3\cdot\sqrt[3]{c}\right)$, οπότε επειδή $\chi_1\cdot\psi_1=3$, $\chi_1>0$, ο γεωμετρικός τόπος του σημείου K στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων είναι ο κλάδος της ισοσκελούς υπερβολής $\psi=\dfrac{3}{\chi}$, $\chi>0$, της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται στο διπλανό σχήμα.



Υποθέτουμε ότι : $(\chi-1)\cdot\left(c\cdot\chi^2+c\cdot\chi-2\right)\ge 0$, για κάθε $\chi>0$.

Δ3 . Έχουμε :

$$(\chi-1)\cdot\left(c\cdot\chi^2+c\cdot\chi-2\right)\ge 0\Rightarrow c\cdot\chi^3+c\cdot\chi^2-2\cdot\chi-c\cdot\chi^2-c\cdot\chi+2\ge 0\Rightarrow c\cdot\chi^3-2\cdot\chi-c\cdot\chi+2\ge 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot\chi^3+2\ge 2\cdot\chi+c\cdot\chi\overset{\chi>0}{\Rightarrow}c\cdot\chi^2+\frac{2}{\chi}\ge 2+c\Rightarrow f(\chi)\ge f(1)\ .$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\chi=1\in(0\ ,+\infty)$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $\chi=1$ από το Θ. Fermat , θα ισχύει : $f'(1)=0$ και επειδή η f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο $\chi_1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}$, άρα ισχύει : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}=1\Rightarrow c=1$.

Δ4 . Η εξίσωση γίνεται :

$$\chi\cdot\eta\mu(\pi\cdot\chi)-\chi^3=2\cdot\chi\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot\chi)+2\Rightarrow\chi\cdot\left[\eta\mu(\pi\cdot\chi)-2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot\chi)\right]=\chi^3+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\eta\mu(\pi\cdot\chi)-2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot\chi)=f(\chi)\ge f(1)=3\ .$$

Ισχύει : $-1\le\eta\mu(\pi\cdot\chi)\le 1\ ,-1\le\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot\chi)\le 1$, άρα $-3\le\eta\mu(\pi\cdot\chi)-2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot\chi)\le 3$, οπότε η ισότητα επιτυγχάνεται μόνο για $\chi=1$.

Μάνος Μαυρογιάννης